Coincidencias matriciales

Juan-Miguel Gracia*

14 de febrero de 2011

Hacia 1960 las matrices habían dejado de ser ese tema horrible, aburrido, retorcido, que podía verse en los libros de análisis algebraico de Rey Pastor o de determinantes y matrices de Aitken: matrices las había centrosimétricas, alternantes, confluentes, persimétricas, circulantes, continuantes, dialíticas, bigradientes, jacobianas, hessianas y wronskianas. En una enumeración que parecía no tener fin, ni ilación. Además, no quedaba clara la distinción entre matrices y determinantes. Pero, habían aparecido los libros de teoría de matrices de F. Gantmacher (traducido al francés) y el de análisis matricial de R. E. Bellman. Ambos ponían el tema en perspectiva, estando más estructurado el libro de Gantmacher.

En 1970, cuando acabé la licenciatura de matemáticas en Madrid, me di cuenta de que estaba interesado en temas heterodoxos. Por un lado me gustaban las ecuaciones diferenciales, por otro la teoría de matrices. Pero había algo extraño en tales coincidencias. Las ecuaciones diferenciales pertenecían al análisis matemático y las matrices caían dentro del álgebra. Te especializabas en análisis o lo hacías en álgebra. Querer entender de ambas materias parecía temerario y lleno de incertidumbres. En el primer campo reinaba el infinito; el tema del segundo consistía en realizar operaciones un número finito de veces. Entre los matemáticos de carne y hueso que conocíamos ninguno tenía semejantes pretensiones.

El campo de las ecuaciones diferenciales se iba delimitando. Crecía mi curiosidad por las ecuaciones lineales. El hecho de ver aparecer la forma canónica de Jordan de una matriz A para resolver el sistema diferencial lineal $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ creaba interés al tiempo que provocaba inquietud. Gracias a Alberto Dou por su libro sobre ecuaciones diferenciales (curiosamente, Dou había escrito un artículo sobre la ecuación de Sylvester $AX - XB = C$). Gracias también a Jesús Fortea que nos enseñó a resolver estos sistemas mediante la forma de Jordan en sus clases de problemas. Gracias asimismo a Joan Tarrés por hallar números de Betti encontrando los factores invariantes de una matriz de números enteros, mediante transformaciones elementales, en una clase de problemas de topología algebraica.

Pronto resultó evidente el estrecho maridaje que había entre matrices y polinomios. Que la escuela inglesa se hubiera interesado por las matrices y las resultantes de polinomios inducía a pensar que habría algún nexo común. Eran tiempos de cambios profundos y lo que contaban eran las aplicaciones lineales en vez de las matrices, pues ¿no acabó resultando que la diferencial de una función

*Departamento de Matemática Aplicada y Estadística e I.O., Universidad del País Vasco, Facultad de Farmacia, Paseo de la Universidad, 7, 01006 Vitoria-Gasteiz, juanmiguel.gracia@ehu.es

era una aplicación lineal? y que la regla de la cadena era simplemente la composición de dos aplicaciones lineales. Ya de estudiante compré el tomo 1 del libro de matrices de Gantmacher; el tomo 2 parecía hablar de temas muy extraños: matrices simétricas complejas; haces de matrices; divisores elementales infinitos (atribuidos a Weiertrass); teorema de Perron-Frobenius; transformaciones de Lyapunov de matrices $A(t)$ que dependían de un parámetro real t; criterios de estabilidad de Routh-Hurwitz; cadenas de Markov; parámetros de Markov. Los divisores elementales infinitos recordaban los puntos del infinito de la geometría proyectiva, pero sonaba tremebundo; ¿qué había llevado a Weiertrass, un analista, a investigar en álgebra? Que los haces de matrices $\lambda B - A$ sirvieran para resolver sistemas diferenciales lineales $Bx'(t) = Ax(t) + b(t)$, donde A y B eran matrices rectangulares, pase; pero que para ciertas condiciones iniciales $x(0) = x^0$, este sistema no tuviese solución o tuviera varias, desconcertaba lo suyo.

Un catedrático de geometría de la Facultad de Ciencias de Madrid (después, de la Universidad Complutense), Javier Etayo, había traducido al castellano el libro de Richard E. Bellman "Introducción al análisis matricial". Pronto lo adquirí y atrajo mi interés. Pero todo hay que decirlo, este libro tenía detractores entre matemáticos de toda mi confianza. No enunciaba los teoremas antes de demostrarlos; a veces no los demostraba; en ocasiones, no anunciaba lo que se traía entre manos; hablaba de matrices positivas y advertía al lector que debería estar vigilante para saber si se refería a matrices de números reales positivos o a matrices definidas positivas; seguía hablando de hechos esenciales en los ejercicios ("misceláneos" para más inri) y en las referencias del final de cada capítulo. Años más tarde leí la autobiografía de Bellman "En el ojo del huracán" y comprendí cómo había sido escrito su libro de matrices. Bellman, que era un investigador a tiempo completo, escribió este libro durante un mes en que los asuntos de investigación no marchaban. En el prólogo de su tratado, Bellman anunció un plan de libros sobre matrices que iban a ser escritos en un futuro más o menos mediato por autores comprometidos. Tomado el plan al pie de la letra, nunca se llegó a materializar. Leyéndolo metafóricamente acertó en un noventa por ciento. Incluso se quedó corto en su proclama propagandística a favor de la teoría de matrices. Además, en el libro provocaba al lector a investigar. Por ejemplo, escribió que sobre los sistemas de recurrencias $x(m+1) = A(m)x(m)$ había innumerables referencias y que parecía ser un tema inagotable para la investigación. *Continuará.*