Coincidencias matriciales, II

Juan-Miguel Gracia

7 de julio de 2011

En el prólogo de su libro, Bellman anunció un plan de libros sobre matrices que iban a ser escritos en un futuro más o menos mediato por autores comprometidos. Tomado el plan al pie de la letra, nunca se llegó a materializar. Leyéndolo metafóricamente acertó en un noventa por ciento. Incluso se quedó corto en su proclama propagandística a favor de la teoría de matrices. Además, en el libro provocaba al lector a investigar. Por ejemplo, escribió que sobre los sistemas de recurrencias $x(m+1) = A(m)x(m)$ había innumerables referencias y que parecía ser un tema inagotable para la investigación. *Continuará.*

Como lo prometido es deuda, he aquí el plan de Bellman y el alcance de sus predicciones. Sin ánimo de ser exhaustivo y tomándome la libertad de no entrecomillar los textos citados o parafraseados, diré que en su edición de 1960 Bellman anunciaba una serie de volúmenes sobre muchos aspectos de la teoría de matrices que no habían sido tratados en el suyo. Este anuncio era mantenido en su edición de 1970. En su prólogo Bellman agradece nada menos que a Ky Fan, Olga Taussky e Ingram Olkin por la lectura de su manuscrito.

Anunciaba que George Forsythe iba a escribir un libro sobre lo que ha acabado denominándose álgebra lineal numérica. Forsythe fue uno de los pioneros de la computación; en particular, fue el mentor de Cleve Moler (fundador de `Matlab`). Los libros de Trefethen, Bau, Demmel, Watkins, Stewart, Sun, Fiedler,... han dado testimonio del vigor intelectual del tema.

Comprometía a Alan Hoffman para escribir un libro dedicado a la teoría combinatoria de matrices, la teoría de juegos de Borel y von Neumann, la teoría de programación lineal, y la teoría de documentación y catalogación. Con creces suplieron el encargo Brualdi, Ryser, Cvetković, Zeilberger, Fiedler en lo que a combinatoria se refiere; Schrijver en cuanto a programación lineal; y son varios los libros actuales sobre la minería de datos. Tenemos además el algoritmo *PageRank* del buscador Google, que –por cierto– es bastante antiguo. De cualquier manera es obvio que una matriz cuadrada es un digrafo ponderado y, como me dijera J.A. Dias da Silva, cuando no sepas qué hacer con la matriz, mírale el digrafo. Louis Weinberg fue emplazado por Bellman a escribir un libro sobre los aspectos topológicos de la teoría de matrices, que aparecieron a través del estudio de las redes eléctricas. En cualquier caso, Chan escribió un tratado sobre este tema.

Sin comprometer a nadie, Bellman preveía un volumen sobre la teoría más avanzada del análisis matricial. Contendría variados aspectos de la teoría de funciones de matrices, la teoría de Loewner, la teoría de Siegel de funciones modulares de matrices y las matrices R de Wigner. La teoría de las funciones matriciales monótonas de Loewner trata del tipo siguiente de problemas: Sea f una función real con derivada continua en el intervalo (a, b). Dados n puntos distintos $p_1, \ldots, p_n$ en (a, b), sea $L_f(p_1, ..., p_n) = (a_{ij})$ la matriz $n \times n$ definida por

$$a_{ij} := \begin{cases} \dfrac{f(p_i) - f(p_j)}{p_i - p_j} \text{ si } i \neq j, \\ f'(p_i) \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Loewner (1934) probó que $A \leq B$ implica que $f(A) \leq f(B)$ si sólo si para todos $p_1, \ldots, p_n$ la matriz $L_f(p_1, ..., p_n)$ es semidefinida positiva. Aquí A, B son matrices hermíticas con espectro contenido en (a, b) y $A \leq B$ significa que $B - A$ es semidefinida positiva. R. Bhatia (1997) escribió el libro *Matrix analysis*, donde se dedica un capítulo a esta teoría. R. Horn y C.R. Johnson en *Matrix analysis* y *Topics in matrix analysis* también se refieren a ella.

Este volumen también contendría la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff: la matriz Z tal que $\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^Z$ viene dada por

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \cdots$$

Este teorema conduce al estudio de la integral multiplicativa de funciones matriciales $A(t)$ donde t es un escalar, también llamadas integrales producto, que son a las integrales ordinarias lo que la multiplicación es a la suma. Dollard y Friedman (1979) escribieron un libro sobre esta clase de integrales. Más adelante, Bellman cita la teoría de representaciones de grupos como merecedora de un volumen aparte. Supongo que ahí está incluida la teoría de los grupos y álgebras de Lie. Un tratamiento elemental, mediante matrices, ha sido escrito por Stillwell; en particular, se prueba la fórmula anterior mediante un procedimiento puramente algebraico en dos páginas, debido a Eichler (1968).

En álgebra, Bellman preveía un volumen sobre el tratamiento de la teoría de ideales por medio de matrices debido a Poincaré. Esta teoría fue retomada por MacDuffee (1931). En ella se asocian matrices cuadradas A de números enteros a ideales $\mathfrak{a}$ de cierto subanillo $\mathcal{O}$ de determinados cuerpos de números. Taussky (1963) probó que si A y B son matrices asociadas a los ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{O}$, entonces existe una matriz unimodular U tal que AUB es una matriz asociada al ideal producto $\mathfrak{ab}$. La teoría contiene una extensión muy interesante de la forma normal de Smith. Esta teoría fue generalizada por Wagner, Bhandari y Nanda a situaciones abstractas.

Como venimos viendo el reto de Bellman fue aceptado. Marshall y Olkin escribieron un libro sobre las desigualdades de mayorización (1979), y Davis otro sobre matrices circulantes (1979). Gohberg, Lancaster, Rodman escribieron varias monografías sobre análisis matricial. Concita especial predicamento en todo el mundo el libro de matrices de Lancaster y Tismenetsky, mi favorito. Incluso en la bourbakista Francia, D. Serre escribió un libro en los años 1990 sobre matrices. En descargo de Bourbaki, debemos decir que en su tratado sobre álgebra apareció la primera noticia sobre el entrelazamiento de factores invariantes, en un ejercicio. S. Friedland está escribiendo, tras iniciarlo en los años 1980, su libro *Matrices*, disponible en Internet, con actualización última en agosto de 2010. A Friedland se le deben avances en la teoría de matrices cuyos elementos pertenecen al anillo de funciones holomorfas en un dominio complejo.

Pese a que Bellman dedicó un capítulo a la descripción variacional de los valores propios de matrices reales simétricas, i.e. el teorema minimax de Courant y Fisher, sin embargo, el concepto de valores singulares no apareció en todo el libro. Este fallo nos indica que la importancia de los valores singulares no había sido advertida hacia 1960.

Si viviera Bellman estaría encantado de ver el desarrollo vigoroso del análisis matricial en la actualidad: perturbación de formas canónicas y de subespacios invariantes, desigualdades de mayorización, valores singulares, entrelazamiento, matrices que dependen de parámetros, semejanza cinemática, sistemas lineales con control (junto con Kalman, Bellman pasa por introductor de la matriz de controlabilidad $[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$), forma canónica de Brunovsky, semejanzas unitarias y simultáneas, pseudoespectros, matrices totalmente positivas, dinámica simbólica, búsquedas semánticas, tratamiento de imágenes (transmisión, reconocimiento), demostración de los fundamentos del algoritmo QR para hallar autovalores, inversas generalizadas, etc. Ciertamente, queda mucho trabajo por hacer para las generaciones venideras.