Isomorfismos canónicos

Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, un resultado bien conocido del Algebra Lineal establece que existe un isomorfismo natural o canónico entre E y el espacio vectorial bidual de E, E^{**}. A la pregunta de por qué a dicho isomorfismo, se le denomina "canónico" la respuesta suele ser : *porque no depende de la base* . Ya de estudiante no me satisfacía completamente esta respuesta, puesto que hay ocasiones en que también aparecen isomorfismos llamados canónicos y en los que no tiene sentido apelar a base alguna. Hubieron de pasar algunos años hasta que estudiando álgebra homológica me introduje en el lenguaje de las *categorías.* Aprendí entonces lo que es una transformación natural de functores y de ahí, una definición satisfactoria desde mi punto de vista de lo que es un *isomorfismo canónico*

No queda pues más remedio que introducirse en tal lenguaje. Como veremos enseguida, en los aspectos básicos no tiene dificultad alguna. En efecto, una *categoría* es el sistema formado por una colección de objetos y para cada par de objetos una colección de morfismos entre ellos de forma que se verifiquen determinadas propiedades naturales de composición de morfismos. Los objetos pueden ser conjuntos, grupos, espacios vectoriales, espacios topológicos... y los morfismos entre pares de objetos, aplicaciones, homomorfismos de grupos, aplicaciones lineales, aplicaciones continuas..., respectivamente.

Un *functor* entre dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es una correspondencia que asigna a cada objeto A de $\mathcal{A}$ un objeto $T(A)$ de $\mathcal{B}$ y a cada morfismo f entre dos objetos A, A' de $\mathcal{A}$ un morfismo $T(f)$ entre los objetos $T(A)$, $T(A')$ de $\mathcal{B}$ de forma que se verifiquen determinadas condiciones naturales de conmutatividad.

Vamos a precisar estas definiciones en el caso particular que nos interesa en esta nota. Fijemos un cuerpo K. Se denomina *categoría de K-espacios vectoriales de dimensión finita*, $\mathcal{V}$, al sistema formado por

(i) El conjunto de todos los K-espacios vectoriales de dimensión finita, que denominamos *objetos* de la categoría y denotamos por $\mathcal{O}b\mathcal{V}$.

(ii) Para cada par de objetos de $\mathcal{V}$, esto es, para cada par de K-espacios vectoriales de dimensión finita E, F, el conjunto de las aplicaciones lineales de E en F, denominados *morfismos de la categoría* y designados por $Mor(E,F)$, esto es $Mor(E,F) = L(E,F)$.

    Para que este sistema forme una categoría, es necesario que además se cumpla que:

(iii) Para cada terna de elementos E, F, G de $\mathcal{O}b\,\mathcal{V}$ hayamos definido una aplicación $Mor(E,F) \times Mor(F,G) \longrightarrow Mor(E,G)$, $(f,g) \longmapsto gf$, que verifique las propiedades

    a) $h(gf) = (hg)f$
    b) $fI_E = I_F f = f$,

    cualesquiera que sean $f \in Mor(E,F)$, $g \in Mor(F,G)$ y $h \in Mor(G,H)$.

Si tomamos como definición, $gf = g \circ f$ (composición de aplicaciones), está claro que se verifican las propiedades anteriores.

Un *functor covariante* T de la categoría $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$ es una correspondencia tal que a cada objeto E de $\mathcal{V}$ asigna un objeto $T(E)$ de $\mathcal{V}$ y a cada $f \in Mor(E,F)$ asigna un morfismo $T(f) \in Mor(T(E),T(F))$ de forma que se verifiquen las siguientes propiedades:

(i) $T(I_E) = I_{T(E)}$

(ii) $T(gf) = T(g)T(f)$ siempre que gf esté definida.

Si a cada $f \in Mor(E, F)$ asignamos un morfismo $T(f) \in Mor(T(F), T(E))$ verificando condiciones análogas a (i) y (ii), se dice que T es un *functor contravariante* de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$.

Ejemplos.

(i) Si definimos $I(E) = E$ y $I(f) = f$, tenemos un functor covariante de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$: el *functor identidad* I.

(ii) Sea F un espacio vectorial de dimensión finita. Si definimos $T(E) = E \times F$ (espacio vectorial producto) y $T(f) = f \times I_F$ donde $(f \times I_F)(x, y) = (f(x), y)$, T es un functor covariante de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$.

(iii) Si $D(E) = E^*$ y $D(f) = f^t$, D es un functor contravariante de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$ que denominamos *functor dualizante*.

(iv) Si $B(E) = E^{**}$ y $B(f) = f^{tt}$, B es un functor covariante de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$ que denominamos *functor bidualizante*.

Sean ahora S y T dos functores (por ejemplo covariantes) de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$. Una *transformación natural* del functor S en el functor T es una aplicación Φ que asigna a cada objeto E de $\mathcal{V}$ un morfismo $\Phi(E)$ de $\mathcal{V}$ que verifica las siguientes condiciones

(i) $\Phi(E) : S(E) \longrightarrow T(E)$ para todo $E \in \mathcal{O}b\mathcal{V}$, esto es, $\Phi(E)$ es una aplicación lineal de $S(E)$ en $T(E)$.

(ii) Para todo morfismo $f : E \longrightarrow F$ de $\mathcal{V}$ se cumple la igualdad

$$T(f)\Phi(E) = \Phi(F)S(f).$$

Si además $\Phi(E)$ es un isomorfismo para cada objeto E de $\mathcal{V}$, se dice que Φ es una *equivalencia natural* o un *isomorfismo* entre los functores S y T. Está claro que se tiene entonces el siguiente resultado que justifica la denominación de canónico del isomorfismo aludido entre E y E^{**}

Proposición. *La aplicación Φ de E en E^{**} definida por*

$$\Phi(x)(\omega) = \omega(x), \;\; x \in E, \;\; \omega \in E^*$$

define un isomorfismo del functor identidad en el functor bidualizante.

De hecho, nos podemos preguntar si existen otros isomorfismos del functor identidad I en el functor bidualizante B. Desde luego, si $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, $\lambda\Phi$, donde $(\lambda\Phi)(E) = \lambda(\Phi(E))$, es asimismo un isomorfismo. Recíprocamente, sea Ψ un isomorfismo de I en B. Entonces para todo $\omega \in E^*$ tendremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & \Psi(E) & & \Phi(E) & \\ E & \rightarrow & E^{**} & \leftarrow & E \\ \downarrow \omega & & \downarrow \omega'' & & \downarrow \omega \\ K & \rightarrow & K^{**} & \leftarrow & K \\ & \Psi(K) & & \Phi(K) & \end{array}$$

en el que las flechas horizontales son isomorfismos. Teniendo en cuenta que los únicos automorfismos de K son las homotecias de razón no nula, resulta que $\Phi(K)^{-1}\Psi(K)$ es una homotecia de razón $\lambda \neq 0$. Entonces la conmutatividad del diagrama nos dice que para todo $x \in E$ y para todo ω se tiene la igualdad $\omega((\Phi(E))^{-1}(\Psi(E)(x))) = \lambda\omega(x)$, de donde $(\Phi(E))^{-1}(\Psi(E)(x)) = \lambda x$, esto es, $\Psi(E)(x) = \lambda\Phi(E)(x)$ y por tanto $\Psi = \lambda\Phi$.

Hemos probado, pues, la siguiente proposición.

Proposición. *El único isomorfismo del functor identidad en el functor bidualizante es, salvo el producto por un escalar no nulo, el definido en la proposición anterior.*

El libro *P.J. Hilton, U. Stammbach; A Course in Homological Algebra; Springer-Verlag (1970)* contiene una amplia exposición de la teoría de categorías y functores . Cuestiones básicas pueden encontrarse, por ejemplo, en cualquier texto avanzado sobre topología algebraica tales como *Bott/Tu, Dold, Spanier,...* Una referencia dedicada íntegramente al estudio de las categorías es *Saunders Mac Lane; Categories for the Working Mathematician ; Springer Verlag (1971)*

Ferran Puerta Sales
marzo 2011