SEGUNDAS JORNADAS ING×MAT
DE LA RED ALAMA
CIEM (CASTRO-URDIALES), 15-17 MAYO 2019

SISTEMAS LINEALES DETERMINADOS POR VALORES CONSECUTIVOS DE LOS ESTADOS

JOSEP FERRER
(UPC)

PROGRAMA DE ÁLGEBRA LINEAL
(INGENIERIA INDUSTRIAL)

3 SEMANAS $\left\{\begin{array}{l}\text{POLINOMIOS}\\ \text{DETERMINANTES}\\ \text{SISTEMAS DE ECUACIONES}\end{array}\right.$

3 SEMANAS $\left\{\begin{array}{l}\text{ESPACIOS VECTORIALES}\\ \text{SUBESPACIOS VECTORIALES}\\ \dots\end{array}\right.$

5 SEMANAS $\left\{\begin{array}{l}\text{APLICACIONES LINEALES} \longleftarrow \text{AQUÍ !!}\\ \text{SU MATRIZ}\\ \text{CAMBIO DE BASE}\\ \text{VALORES PROPIOS}\\ \text{VECTORES} \quad \text{"}\\ \text{DIAGONALIZACIÓN}\\ \dots\end{array}\right.$

3 SEMANAS $\left\{\begin{array}{l}\text{SISTEMAS LINEALES}\\ \dots\end{array}\right.$

PROBLEMA

HABITANTES EN EL CENTRO

- 2009: 1.000.000
- 2012: 600.000
- 2019 (PROV.): 400.000

1. ¿2024?
2. ¿2029, 2034...?
3. ¿EQUILIBRIO?
4. ¿TENDEMOS HACIA ÉL?
5. ¿2009 + 5k?
6. ¿DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA?
7. ¿QUÉ MÁS PODEMOS SABER?

OBS. - MODELO SIMPLIFICADO

- CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUÍMICOS...)
- 2 COORDENADAS (VARIAS CORONAS...)
- SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)
- ...

PLANTEAMIENTO CON ÁLGEBRA LINEAL

ESPACIO VECTORIAL $\equiv E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{matrix} x \text{ CENTRO} \\ y \text{ PERIFÈRIA} \\ \text{(EN MILLONES)} \end{matrix} \right\} \cong \mathbb{R}^2$

APLICACIÓN LINEAL ⊛

$$\underset{\text{HAB. AÑO } t}{E} \xrightarrow{f} \underset{\text{HAB. AÑO } t+5}{E} \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x(t+5) \\ y(t+5) \end{pmatrix}$$

$$\underset{2009}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{f} \underset{2014}{\begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix}} \xrightarrow{f} \underset{2019\ (\text{PROV})}{\begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{f} \cdots$$

① $f\begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix}$

$\quad \llcorner\ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix}$

⊛ EN ESTE CASO: LINEALIDAD $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{PROPORCIONALIDAD} \\ \text{HOMOGENEIDAD} \end{cases}$

PLANTEAMIENTO CON ÁLGEBRA LINEAL

ESPACIO VECTORIAL $\equiv E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x \text{ CENTRO} \\ y \text{ PERIFÈRIA} \\ \text{(EN MILLONES)} \end{matrix} \right\} \cong \mathbb{R}^2$

APLICACIÓN LINEAL

$$\underset{\text{HAB. AÑO } t}{E} \xrightarrow{f} \underset{\text{HAB. AÑO } t+5}{E} \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x(t+5) \\ y(t+5) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underset{2009}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{f} \underset{2014}{\begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix}} \xrightarrow{f} \underset{2019\ (\text{PROV})}{\begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{f} \cdots}$$

① $f\begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} \overset{*}{=} -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'3 \\ 0'7 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\boxed{\text{300.000 EN 2024}}$

$\llcorner \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0'4 = 1 \cdot \alpha + 0'6 \cdot \beta \\ 0'6 = 0 + 0'4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\cancel{3}1/2 \\ \beta = 3/2 \end{cases} *$

SISTEMAS DE ECUACIONES !

PROBLEMA

HABITANTES EN EL CENTRO

- 2009: 1.000.000
- 2012: 600.000
- 2019 (PROV.): 400.000

$\boxed{300.000}$

1. 2024 ?
2. 2029, 2034 ... ?
3. EQUILIBRIO ?
4. TENDEMOS HACIA ÉL ?
5. 2009 + 5k ?
6. DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?
7. QUÉ MÁS PODEMOS SABER ?

OBS. - MODELO SIMPLIFICADO

- CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUÍMICOS...)
- 2 COORDENADAS (VARIAS CORONAS...)
- SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)
- ...

PERO... MUY LABORIOSO: $\boxed{\text{MATRIZ DE } f}$

(EN BASES NATURALES)

$$\left\{\begin{array}{l} f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0'6\\0'4\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0'6\\0'4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0'4\\0'6\end{pmatrix} \overset{\circledast}{=} \ldots = \begin{pmatrix}0'1\\0'9\end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0'6\\0'4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = -3/2\\ \beta = 5/2\end{array}\right. \circledast$$

SÓLO ESTA VEZ !

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}0'6 & 0'1\\ 0'4 & 0'9\end{pmatrix}}$$

① 2024: $\begin{pmatrix}0'4\\0'6\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0'4\\0'6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0'3\\0'7\end{pmatrix}$

② 2029: $\begin{pmatrix}0'3\\0'7\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0'3\\0'7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0'25\\0'75\end{pmatrix}$

2034: $\begin{pmatrix}0'25\\0'75\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0'25\\0'75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0'225\\0'775\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}0'6\\0'4\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}0'4\\0'6\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}0'3\\0'7\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}0'25\\0'75\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}0'225\\0'775\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \ldots$$

PROBLEMA

HABITANTES EN EL CENTRO

- 2009: 1.000.000
- 2012: 600.000
- 2019 (PROV.): 400.000

1. 2024 ? — 300.000
2. 2029, 2034 ... ? — 250.000 / 225.000
3. EQUILIBRIO ?
4. TENDEMOS HACIA ÉL ?
5. 2009 + 5k ?
6. DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?
7. QUÉ MÁS PODEMOS SABER ?

OBS. - MODELO SIMPLIFICADO
- CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUÍMICOS...)
- 2 COORDENADAS (VARIAS CORONAS...)
- SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)
- ...

LA MATRIZ TAMBIÉN...

③ EQUILIBRIO $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'6 & 0'1 \\ 0'4 & 0'9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_e = 0'6\, x_e + 0'1\, y_e \\ y_e = 0'4\, x_e + 0'9\, y_e \end{cases} \Leftrightarrow$$

OTRA VEZ SISTEMAS DE ECUACIONES (INDETERMINADO!)

$$\Leftrightarrow \left\{ -0'4\, x_e + 0'1 \underset{1 - x_e}{\underset{\shortparallel}{y_e}} = 0 \right. \Leftrightarrow \begin{matrix} x_e = 0'2 \\ y_e = 0'8 \end{matrix} \Leftrightarrow \boxed{\text{EQUILIBRIO EN } 200.000}$$

PROBLEMA

HABITANTES EN EL CENTRO

- 2009: 1.000.000
- 2012: 600.000
- 2019 (PROV.): 400.000

300.000

250.000

225.000

200.000

1. 2024 ?
2. 2029, 2034 ... ?
3. EQUILIBRIO ?
4. TENDEMOS HACIA ÉL ?
5. 2009 + 5k ?
6. DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?
7. QUÉ MÁS PODEMOS SABER ?

OBS. - MODELO SIMPLIFICADO

- CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUÍMICOS...)
- 2 COORDENADAS (VARIAS CORONAS...)
- SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)
- ...

NECESITAMOS MÁS TEORÍA

$\left\{ \begin{array}{l} \text{VALORES PROPIOS (VAPs)} \\ \text{VECTORES PROPIOS (VEPs)} \\ \text{DIAGONALIZACIÓN !!!} \end{array} \right.$

④ $Q_A(t) = \det \begin{pmatrix} 0'6-t & 0'1 \\ 0'4 & 0'9-t \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{=} (t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)$

DETERMINANTES ! POLINOMIOS !

VAPs $= 1, \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\text{TENDEMOS AL EQUILIBRIO}}$

⑤ VEPs $\left\{ \begin{array}{l} Nuc(A - 1 \cdot I) = \ldots = \left[\begin{pmatrix} 0'2 \\ 0'8 \end{pmatrix}\right] \\ Nuc(A - \frac{1}{2}I) = \ldots = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \end{array} \right. \Rightarrow S^{-1} A \underset{\begin{pmatrix} 0'2 & 1 \\ 0'8 & -1 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$!!!

SUBESPACIOS VECTORIALES !

$\begin{pmatrix} x(2009+5k) \\ y(2009+5k) \end{pmatrix} = \overbrace{A \ldots\ldots A}^{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix} S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \ldots = \begin{pmatrix} 0'2 + 0'8\frac{1}{2^k} \\ \ldots \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} 200.000 + \frac{1}{2^k} 800.000 \\ \text{EN } 2009+5k \end{array}}$

PROBLEMA

HABITANTES EN EL CENTRO

2009: 1.000.000
2012: 600.000
2019 (PROV.): 400.000

300.000
250.000
225.000
200.000

1. 2024 ?
2. 2029, 2034 ... ?
3. EQUILIBRIO ?
4. TENDEMOS HACIA ÉL ? SI

$$\boxed{200.000 + \frac{1}{2^k} 800.000}$$

5. 2009 + 5k ?
6. DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?
7. QUÉ MÁS PODEMOS SABER ?

OBS. - MODELO SIMPLIFICADO
- CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUÍMICOS...)
- 2 COORDENADAS (VARIAS CORONAS...)
- SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)
- ...

ADEMÁS, TAMBIÉN DEDUCIMOS QUE...

⑥ ALARMA $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_e \\ y'_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0'6 & a \\ 0'4 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(2019) \\ y(2019) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'6 & 0 \\ 0'4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'36 \\ 0'64 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ ALARMA SI 2019 (DEF) ES 360.000

⑦ DE HECHO: $\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} \Leftrightarrow x(k+1) = \underbrace{0'6}_{\Downarrow} x(k) + \underbrace{0'1}_{\Downarrow} y(k)$

SE VAN EL 60% — RETORNAN EL 10% ⊛

⊛
- ESPERADO ?
- DIFÍCIL DE MEDIR !
- ALARMA $\Leftrightarrow$ NO HAY RETORNO

PROBLEMA

HABITANTES EN EL CENTRO

- 2009: 1.000.000
- 2012: 600.000
- 2019 (PROV.): 400.000

1. 2024 ? — 300.000
2. 2029, 2034 ... ? — 250.000, 225.000
3. EQUILIBRIO ? — 200.000
4. TENDEMOS HACIA ÉL ? — SÍ
5. 2009 + 5k ? — $200.000 + \frac{1}{2^k} 800.000$
6. DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ? — $\boxed{360.000}$
7. QUÉ MÁS PODEMOS SABER ? — 60% SE VAN, 10% RETORNAN

OBS. - MODELO SIMPLIFICADO

- CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUÍMICOS...)
- 2 COORDENADAS (VARIAS CORONAS...)
- SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)
- ...

TEORIA GENERAL

PROP.- EN $\mathbb{R}^n$: $\underbrace{x(0), x(1), \ldots, x(n-1)}_{\text{LINEALMENTE INDEPENDIENTES}}, \; x(n) = a_0 x(0) + \ldots + a_{n-1} x(n-1)$ ⊛

ENTONCES:

(1) $$\boxed{A = \underbrace{\begin{pmatrix} x(0) & x(1) & \ldots & x(n-1) \end{pmatrix}}_{X} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \cdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} x(1) & \ldots & x(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) & \ldots & x(n-1) \end{pmatrix}^{-1}}$$

(2) $\boxed{Q_A(t) = t^n - a_{n-1} t^{n-1} - \ldots - a_1 t - a_0}$

$\boxed{A}$ **NO DEGORATORIA** $(\Leftrightarrow \dim \operatorname{Nuc}(A - \lambda I) = 1, \; \forall \lambda \text{ VAP})$

NUESTRO EJEMPLO.- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix}$ L.I.

$$\left.\begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 0'6 & 0'4 \\ 0'4 & 0'6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0'6 \\ 0 & 0'4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0'6 & 0'1 \\ 0'4 & 0'9 \end{pmatrix} \\ Q_A(t) = t^2 - \frac{3}{2} t + \frac{1}{2} \end{array}$$

⊛
- DATOS $x(0), \ldots, x(n)$ "FÁCILMENTE" MEDIBLES
- HIPÓTESI L.I. GENÈRICA
- $\begin{pmatrix} a_0 \\ \ldots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) & \ldots & x(n-1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x(n) \end{pmatrix}$

¡¡QUÉ BONITA Y EFICAZ
ES EL ÁLGEBRA LINEAL!!