

SEGUNDAS JORNADAS ING x MAT  
DE LA RED ALAMA  
CIEM (CASTRO-URDIALES), 15-17 MAYO 2019

SISTEMAS LINEALES  
DETERMINADOS POR  
VALORES CONSECUTIVOS  
DE LOS ESTADOS

JOSEP FERRER  
(UPC)

# PROGRAMA DE ÁLGEBRA LINEAL (INGENIERIA INDUSTRIAL)

3 SEMANAS { POLINOMIOS  
DETERMINANTES  
SISTEMAS DE ECUACIONES

3 SEMANAS { ESPACIOS VECTORIALES  
SUBESPACIOS VECTORIALES  
...

5 SEMANAS { APLICACIONES LINEALES  
SU MATRIZ  
CAMBIO DE BASE  
VALORES PROPIOS  
VECTORES " "  
DIAGONALIZACIÓN  
...

3 SEMANAS { SISTEMAS LINEALES  
...

— AQUI !!!

2/16

# PROBLEMA

HABITANTES  
EN EL CENTRO

{ 2009: 1.000.000  
2012: 600.000  
2019 (PROV.): 400.000

- ① 2024 ?
- ② 2029, 2034 ... ?
- ③ EQUILIBRIO ?
- ④ TENDENCIAS HACIA ÉL ?
- ⑤ 2009 + 5k ?
- ⑥ DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?
- ⑦ QUÉ MÁS PODEREMOS SABER ?

OBS. - MODELO SIMPLIFICADO { CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUINQUENALES...)  
2 COORDENADAS (VARIAS ZONAS...)  
SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)  
...



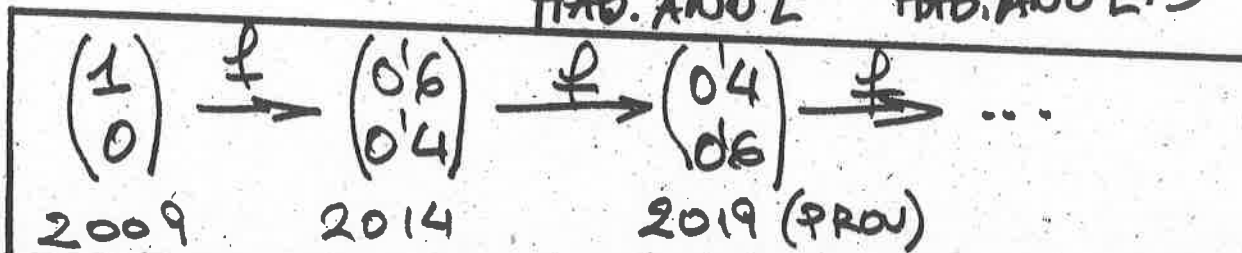
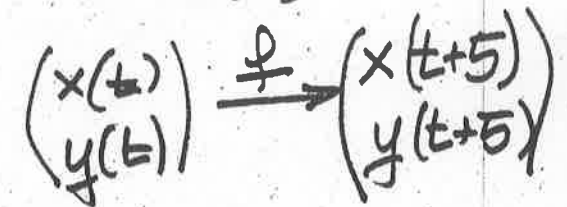
# PLANTEAMIENTO CON $\dot{\text{ÁLGEBRA LINEAL}}$

ESPACIO VECTORIAL  $\equiv E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$   $\left. \begin{array}{l} \times \text{ CENTRO} \\ \text{Y PERIFERIA} \\ (\text{EN MILLONES}) \end{array} \right\} \cong \mathbb{R}^2$

APLICACIÓN LINEAL



HAB. AÑO  $t$       HAB. AÑO  $t+5$



$$\textcircled{1} f \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'3 \\ 0'7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 300.000 \\ \text{en } 2024 \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0'4 = 1 \cdot \alpha + 0'6 \cdot \beta \\ 0'6 = 0 + 0'4 \cdot \beta \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \quad (*) \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

↑  
SISTEMAS DE ECUACIONES !

5/16



# PROBLEMA

HABITANTES  
EN EL CENTRO

{ 2009: 1.000.000  
2012: 600.000  
2019 (PROV.): 400.000

- ① 2024 ? 300.000
- ② 2029, 2034 ... ?
- ③ EQUILIBRIO ?
- ④ TENDENCIAS HACIA ÉL ?
- ⑤ 2009 + 5k ?
- ⑥ DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?
- ⑦ QUÉ MÁS PODRÍAMOS SABER ?

OBS. - MODELO  
SIMPLIFICADO { CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUINQUENALES...)  
2 COORDENADAS (VARIAS ZONAS...)  
SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)  
...

PERO... MUY LABORIOSO:

MATRIZ DE  $f$

(EN BASES NATURALES)

$$\begin{cases} f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} \stackrel{\otimes}{=} \dots = \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3/2 \otimes \\ \beta = 5/2 \otimes \end{cases}$$

SÓLO  
ESTA  
VEZ !



$$A = \begin{pmatrix} 0'6 & 0'1 \\ 0'4 & 0'9 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \text{ 2024: } \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} \rightarrow (A) \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'3 \\ 0'7 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \text{ 2029: } \begin{pmatrix} 0'3 \\ 0'7 \end{pmatrix} \rightarrow (A) \begin{pmatrix} 0'3 \\ 0'7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'25 \\ 0'75 \end{pmatrix}$$

$$\text{2034: } \begin{pmatrix} 0'25 \\ 0'75 \end{pmatrix} \rightarrow (A) \begin{pmatrix} 0'25 \\ 0'75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'225 \\ 0'775 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0'3 \\ 0'7 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0'25 \\ 0'75 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0'225 \\ 0'775 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \dots$$

7/16

# PROBLEMA

HABITANTES  
EN EL CENTRO

{ 2009: 1.000.000  
2012: 600.000  
2019 (PROV.): 400.000

① 2024 ?

② 2029, 2034 ... ?

③ EQUILIBRIO ?

④ TENDENCIAS HACIA ÉL ?

⑤ 2009 + 5k ?

⑥ DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?

⑦ QUÉ MÁS PODRÍAMOS SABER ?

300.000
250.000
225.000

OBS. - MODELO

SIMPLIFICADO

{ CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUINQUENALES...)  
2 COORDENADAS (VARIAS ZONAS...)  
SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)  
...



# LA MATRIZ TAMBIÉN...

③ EQUILIBRIO  $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_e = 0.6x_e + 0.4y_e \\ y_e = 0.4x_e + 0.9y_e \end{cases} \Leftrightarrow$

OTRA VEZ  
SISTEMAS  
DE ECUACIONES  
(INDETERMINADO!)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -0.4x_e + 0.4y_e = 0 \\ 1 - x_e \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_e = 0.2 \\ y_e = 0.8 \end{cases}$

**EQUILIBRIO EN  
200.000**

# PROBLEMA

HABITANTES  
EN EL CENTRO

{ 2009: 1.000.000  
2012: 600.000  
2019 (PROV.): 400.000

① 2024 ?

② 2029, 2034 ... ?

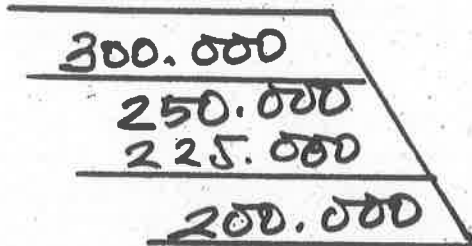
③ EQUILIBRIO ?

④ TENDENCIAS HACIA ÉL ?

⑤ 2009 + 5k ?

⑥ DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?

⑦ QUÉ MÁS PODRÍAMOS SABER ?



OBS. - MODELO

SIMPLIFICADO

{ CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUINQUENALES...)  
2 COORDENADAS (VARIAS ZONAS...)  
SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)  
...

10/16



# PROBLEMA

HABITANTES  
EN EL CENTRO

{ 2009: 1.000.000  
2012: 600.000  
2019 (PROV.): 400.000

① 2024 ?

② 2029, 2034 ... ?

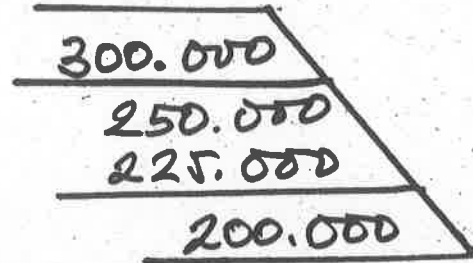
③ EQUILIBRIO ?

④ TENDENCIAS HACIA EL ?

⑤ 2009 + 5k ?

⑥ DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?

⑦ QUÉ MÁS PODRÍAMOS SABER ?



SII

$$200.000 + \frac{1}{2^k} 800.000$$

OBS. - MODELO  
SIMPLIFICADO

{ CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUINQUENALES...)  
2 COORDENADAS (VARIAS ZONAS...)  
SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)  
...

# ADENÁS, TAMBIÉN DEDUCIMOS QUE...

$$\textcircled{6} \text{ ALARMA} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'e \\ y'e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0'6 & a \\ 0'4 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow b=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(2019) \\ y(2019) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'6 & 0 \\ 0'4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'36 \\ 0'64 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{ALARMA SI} \\ \text{2019 (DEF)} \\ \text{ES 360.000} \end{array}}$$

$$\textcircled{7} \text{ DE HECHO: } \begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} \Leftrightarrow x(k+1) = 0'6 x(k) + 0'4 y(k)$$

$\downarrow$  SE VAN EL 60%       $\downarrow$  RETORNAN EL 10%  $\otimes$

- $\otimes$  { • ESPERADO ?
- DIFÍCIL DE MEDIR !
- ALARMA  $\Leftrightarrow$  NO HAY RETORNO

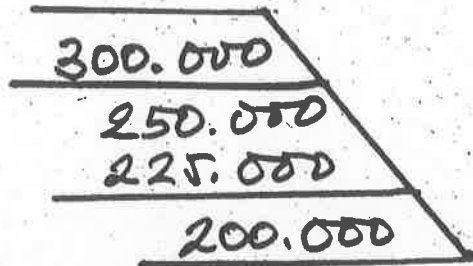


# PROBLEMA

HABITANTES  
EN EL CENTRO

{ 2009: 1.000.000  
2012: 600.000  
2019 (PROV.): 400.000

- ① 2024 ?
- ② 2029, 2034 ... ?
- ③ EQUILIBRIO ?
- ④ TENDENCIAS HACIA ÉL ?
- ⑤ 2009 + 5k ?
- ⑥ DEFINITIVO 2019 QUE ALARMARÍA ?
- ⑦ QUÉ MÁS PODEREMOS SABER ?



$200.000 + \frac{1}{2k} 800.000$

$360.000$

60% SE VAN  
10% RETORNAV

OBS. - MODELO  
SIMPLIFICADO

{ CONSTANCIA EN EL TIEMPO (PROCESOS QUINQUENALES...)  
2 COORDENADAS (VARIAS ZONAS...)  
SIN CRECIMIENTO (% QUINQUENAL...)  
...

14/16

# TEORIA GENERAL

PROP. - EN  $\mathbb{R}^m$ :  $x(0), x(1), \dots, x(m-1), x(m)$



LINEALMENTE  
INDEPENDIENTES

$$\parallel \quad \alpha_0 x(0) + \dots + \alpha_{m-1} x(m-1)$$

ENTONCES:

$$(1) \quad \boxed{A = \begin{pmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(m-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \alpha_0 \\ 1 & \dots & \dots & \alpha_1 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha_{m-1} \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} x(1) & \dots & x(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) & \dots & x(m-1) \end{pmatrix}^{-1}}$$

$$(2) \quad \boxed{Q_A(t) = t^m - \alpha_{m-1} t^{m-1} - \dots - \alpha_1 t - \alpha_0}$$

$A$  NO DEGRADATORIA ( $\Leftrightarrow \dim \text{Nuc}(A - \lambda I) = 1, \forall \lambda \text{ VAP}$ )

UESTRO EJEMPLO -  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$  L.I.

$$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$Q_A(t) = t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$$

- DATOS  $x(0), \dots, x(m)$  "FÁCILMENTE" MEDIBLES
- HIPÓTESIS L.I. GENÉRICA
- $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) & \dots & x(m-1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x(m) \end{pmatrix}$

QUÉ BONITA Y EFICAZ  
ES EL ÁLGEBRA LINEAL ! !

16/16